13эл математика 06.12.23

Тема: «Метод координат» - конспект

Глава V
Метод координат в пространстве. Движения

§ 1 Координаты точки и координаты вектора

46 Прямоугольная система координат в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков*, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве (рис. 121). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.

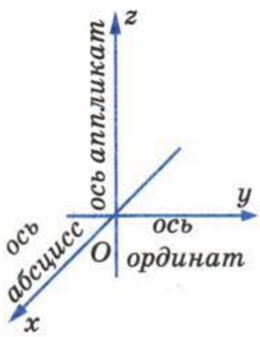

Рис. 121

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее **координатами**. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 122). Первая координата точки M (она называется **абсциссой** и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки M_2 определяется вторая координата **(ордината)** y точки M,

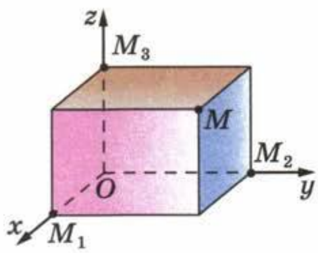

Рис. 122

---

* Напомним, что при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В данной главе под длиной отрезка подразумевается это число.

а с помощью точки M_3 — третья координата (**аппликата**) z точки M. Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: $M\ (x;\ y;\ z)$, причем первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 123 изображены шесть точек $A\ (9;\ 5;\ 10)$, $B\ (4;\ -3;\ 6)$, $C\ (9;\ 0;\ 0)$, $D\ (4;\ 0;\ 5)$, $E\ (0;\ 3;\ 0)$, $F\ (0;\ 0;\ -3)$.

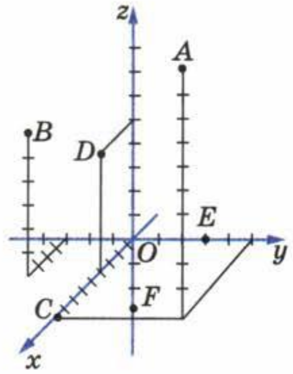

Рис. 123

Если точка $M\ (x;\ y;\ z)$ лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки M равна нулю: $z = 0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y = 0$, а если $M \in Oyz$, то $x = 0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки M равны нулю: $y = 0$ и $z = 0$ (например, у точки C на рисунке 123). Если $M \in Oy$, то $x = 0$ и $z = 0$; если $M \in Oz$, то $x = 0$ и $y = 0$. Все три координаты начала координат равны нулю: $O\ (0;\ 0;\ 0)$.

47 Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\ \{x;\ y;\ z\}$. На рисунке 125 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\ \{2;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\ \{2;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\ \{2;\ 2;\ 0\}$, $\vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\ \{0;\ 0;\ 1\}$.

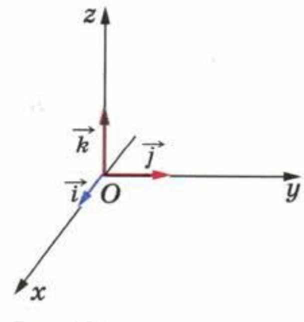

Рис. 124

403 Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$.

404 Даны векторы $\vec{a}\ \{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\ \{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\ \{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\ \{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Например:

$\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{r}$ $\qquad$ $\vec{a}\ \{5;\ 4;\ -2\}$.

$\vec{b}\ \{2\ 3\ 5\}$ $\qquad$ $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.